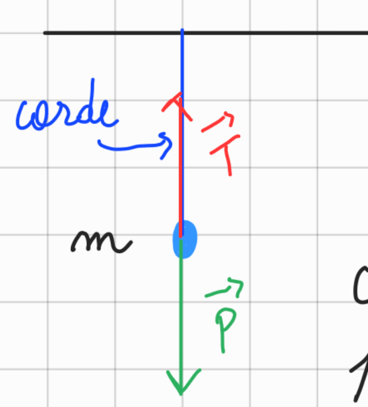
(Suite chap. II. 3). Premières Applications)

B. Masse suspendue par une corde



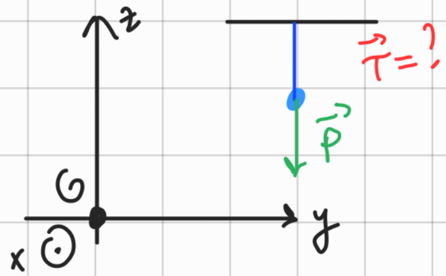
La corde est supposée tendue, et la masse est immobile. On note $\vec{T}$ la force exercée par la corde sur m.

Logique de la résolution (statique des forces) : on sait $\vec{a} = \vec{0}$ (car le corps est immobile). On doit donc avoir $\vec{F} = \vec{0}$. Que peut-on en déduire sur $\vec{T}$?

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P} \quad \text{où } \vec{P} = m\vec{g}. \quad (*)$$

On déduit que $\vec{T}$ est de norme égale à mg et de direction (ou de sens) opposé à $\vec{P}$.

Résolution à l'aide d'un système d'axes ?



$$\vec{P} = m\vec{g} = m\,(0; 0; -g)$$

$$\vec{T} = (T_x; T_y; T_z).$$

But : calculer T_x, T_y et T_z en fonction des paramètres du problème (m et g).

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$, et donc si on décompose suivant Ox, Oy et Oz, on trouve :

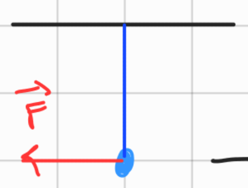
$$\begin{array}{lll} \overbrace{0}^{P_x} + T_x = 0 & & Ox \\ \overbrace{0}^{P_y} + T_y = 0 & & Oy \\ \overbrace{-mg}^{P_z} + T_z = 0 & & Oz \end{array}$$

<u>Solution</u> : $T_x = 0$; $T_y = 0$; $T_z = mg$.

$\Rightarrow$ On obtient la même conclusion que ci-dessus $(*)$.

<u>Remarque (notation) "vecteur nul"</u> : $\vec{0} = (0;0;0)$.

La force $\vec{T}$ est appelée la force de tension. Le modèle pour $\vec{T}$, pour une corde tendue, est de s'ajuster pour équilibrer la force parallèle à la corde à son point d'attache sur m.



$\Rightarrow$ il peut y $\overbrace{\text{ }}^{\text{avoir}}$ des forces telles que $\vec{F} \neq \vec{0}$, <u>mais</u> $\vec{T}$ s'ajuste pour garder la longueur de la corde constante.

On appelle la tension de la corde la norme de $\vec{T}$.

Pour une corde réaliste, il existe une valeur maximale de T, telle que au-delà, la corde se casse :

Tc "Tension critique" ⇒ $T \leq T_c$.
Si $T > T_c$ ⇒ corde casse !

Dans notre exemple : ceci se traduit par une masse maximale m_{max} :

$$T = mg \leq T_c \iff m \leq \frac{T_c}{g}$$

$$\Rightarrow m_{max} = \frac{T_c}{g}.$$

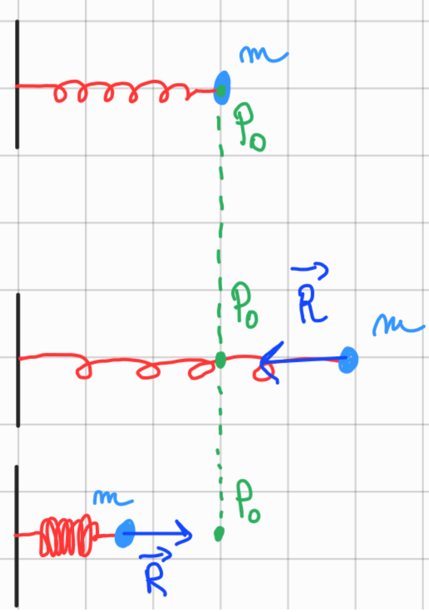
Exemple numérique : $T_c = 5000\ N$, alors

$$m_{max} = 5000\ N / 10\ m s^{-2} = 500\ kg.$$

$(1 N = 1\ kg\ m\ s^{-2})$.

C. Ressort et la loi de Hoocke

But : décrire mathématiquement la force exercée par un ressort déformé.



"Position d'équilibre"
Le ressort n'est pas déformé.
⇒ force nulle.

Ressort est étiré ⇒ force va vers la gauche.

Ressort comprimé ⇒ force vers la droite.

La force $\vec{R}$ est la force de rappel.

Modèle (la loi de Hoocke) :

$$\vec{R} = k\,\overrightarrow{PP_0}$$

où k est une constante appelée la constante de rappel : $(k>0)$

$$[k] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

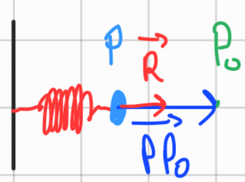
SI : $kg\,s^{-2} = N/m$.

Intuition : k est "grand" $\Leftrightarrow$ le ressort est "dur"

k est "petit" $\Leftrightarrow$ ..... "mou".

Dans la formule pour $\vec{R}$, nous avons aussi:
P : position de la masse attachée au ressort
P_0 : position d'équilibre.

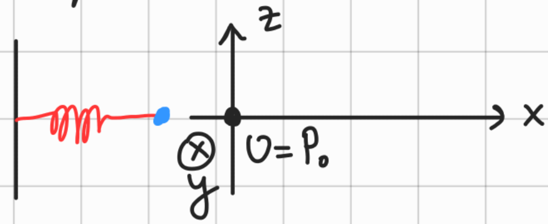
Exemple : ressort comprimé



Propriété : la norme de $\vec{R}$ est donnée par

$$R = k\,\underbrace{\|\overrightarrow{PP_0}\|}_{\text{intensité de la déformation.}}$$

En composantes ?



On choisit le point de référence O en P_0.

Par définition, on $\vec{OP} = (x ; y ; z)$. Ici, on a $y = 0$ et $z = 0$. De plus, $\vec{OP} = -\vec{PO}$, et comme $P_0 = O$, on a

$$\vec{OP} = -\vec{PP_0}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = k\,\vec{PP_0} = -k\,\vec{OP} = -k\,(x ; 0 ; 0)$$

$$\Rightarrow R_x = -kx \qquad R_y = 0 \qquad R_z = 0 .$$

Exemples d'applications de la loi de Hooke :

1). Application statique.

Deux forces : $\vec{P}$ et $\vec{R}$.
Masse m est supposée immobile.

But : calculer la position P_* telle que la force totale sur la masse m soit nulle en P_*.

On trouve donc : $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$] modèle pour $\vec{R}$

$\Leftrightarrow \quad k\,\vec{P_*P_0} + \vec{P} = \vec{0}$] $\vec{P} = m\vec{g}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{P_*P_0} = -\vec{P}/k = -\dfrac{m}{k}\,\vec{g}$.

La norme de $\overrightarrow{P_* P_0}$ vaut donc

$$\|\overrightarrow{P_* P_0}\| = \frac{m}{k} g$$

$\Rightarrow$ la distance entre P_0 et P_* vaut $\frac{m}{k} g$.

$\frac{m}{k} g \nearrow$ si $m \nearrow$

$\nearrow$ si $g \nearrow$

$\searrow$ si $k \nearrow$