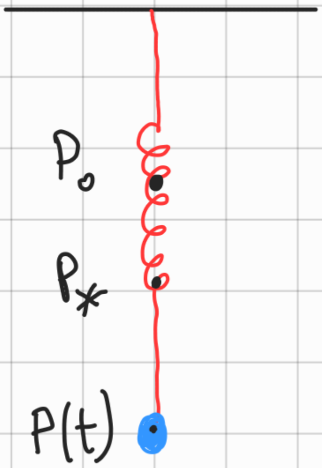
(Suite loi de Hoocke)

2). Application dynamique



$\|\overrightarrow{P_0P_*}\| = \frac{m}{k} g$.

P_0 : position d'équilibre à vide (sans la masse) ; propriété du ressort.

P_* : position d'équilibre avec la masse ; par définition,

$$k \overrightarrow{P_*P_0} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Calculons la force totale $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{P} = k \overrightarrow{PP_0} + m\vec{g}$$

ici, c'est $P(t)$.

Remarque : $\overrightarrow{PP_0} = \overrightarrow{PP_*} + \overrightarrow{P_*P_0}$.
On remplace dans l'expression de $\vec{F}$:

$$\vec{F} = k \overrightarrow{PP_*} + \underbrace{k \overrightarrow{P_*P_0} + m\vec{g}}_{0}$$

$= \vec{0}$ par définition de P_*.

Maintenant, choisissons le point de référence O en P_*.

On note $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$ (notations habituelles en cinématique). On trouve alors :

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}(t).$$

$\left(\overrightarrow{PP_*} = \overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP} = -\vec{r} \right).$

On applique à présent $\vec{F} = m\vec{a}$ et on trouve l'équation suivante :

$$-k\,\vec{r}(t) = m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

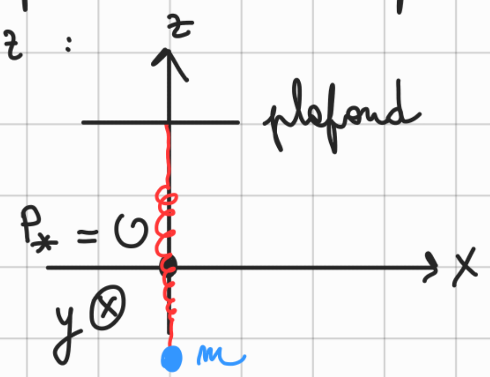
Rappel : nous avons déjà vu une équation de ce type !

$$MH : a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Dans notre exemple :

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,\vec{r}(t).$$

Décomposons cette équation dans le système $Oxyz$:



On suppose pour simplifier la discussion que $x(t)$ et $y(t)$ sont constants (et nuls).

$\Rightarrow$ la partie intéressante du mouvement a lieu le long de l'axe Oz :

$$\vec{r}(t) = \left(0\,;\,0\,;\,z(t)\right).$$

L'équation pour $z(t)$ est alors :

$$z''(t) = -\frac{k}{m} z(t)$$

Ceci est un exemple d'équation différentielle : l'inconnue est une fonction, ici $z(t)$, et on a une contrainte sur la dérivée de $z(t)$ (ici, la dérivée seconde).
Dans ce cours : on ne résoud pas cette équation différentielle. On utilise ce que l'on sait du MH vu en cinématique :

$$\underbrace{\text{Equation : } z''(t) = -\frac{k}{m} z(t)}_{} \qquad \underbrace{\text{MH : } a = -\omega^2 x, \quad x(t) = A\sin(\omega t + \theta_0)}_{}$$

$$\boxed{z(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \theta_0\right).}$$

Remarque : le facteur "vitesse angulaire" ω est fixé par k et m :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En particulier : la fréquence f vaut

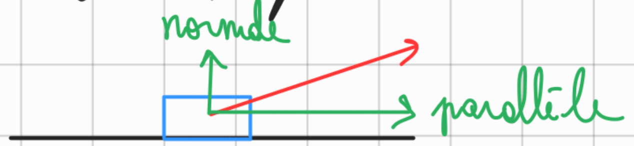
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$\Rightarrow$ ne dépend pas de A, θ_0 ni de g !

les paramètres A et θ_0 (amplitude et phase) sont fixés lors de la préparation du système : ce sont les "conditions initiales".
Analogie (MRUA) : $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$.

D. Forces exercées par une surface plane rigide

→ forces de frottements et force normale.
En général, la force exercée par une surface sur un bloc sera décomposée en une force perpendiculaire et une force parallèle à la surface :



Force normale : $\vec{N}$; $\perp$ à la surface.
Force parallèle : frottements. Deux cas :
A. Corps immobile ; force de frottements statiques $\vec{F}_s$.

B. Corps en mouvement sur la surface ; force de frottements dynamiques (cinétiques) : $\vec{F}_d$

Modèles :

$\vec{N}$: la force $\vec{N}$ s'ajuste pour annuler la composante $\perp$ à la surface de l'accélération. "Résiste à la déformation".

$\vec{F}_s$: la force $\vec{F}_s$ s'ajuste pour annuler la composante // à la surface de l'accélération. Ceci n'a évidement de sens que si $\vec{a} = \vec{0}$, ce qui est par hypothèse vrai pour les frottements statiques.
Il existe une condition d'existence pour cette force : il existe une valeur maximale pour F_s :

$$F_s \leq \mu_s N,$$

où $N = \|\vec{N}\|$ et μ_s = coefficient de frottement statique ; $[\mu_s] = 1$.

Valeur typique de $\mu_s = 0.2$; valeur extrême : (caoutchouc et béton) : $\mu_s \simeq 3$.

$\vec{F}_d$: par hypothèse, $\vec{v} \neq \vec{0}$. On a alors (modèle) :

Direction : opposée à $\vec{v}$.
Norme : $\mu_d N$,
où μ_d est le coefficient de frottements dynamiques. $[\mu_d] = 1$.

Intuition : μ_s ou μ_d petit $\rightsquigarrow$ très glissant.