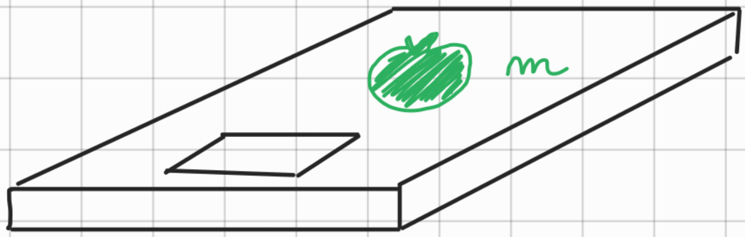
Applications :

1). Balance de cuisine



Si le corps est immobile, alors $\vec{a} = \vec{0}$ et donc $\vec{F} = \vec{0}$.
Deux forces sont pertinentes : le poids $\vec{P}$ et la force normale $\vec{N}$:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$$

Modèle pour $\vec{P} = m\vec{g}$. Donc $\vec{N} = -\vec{P} = -m\vec{g}$, et en particulier,

$$N = mg. \quad (\text{! à l'équilibre !})$$

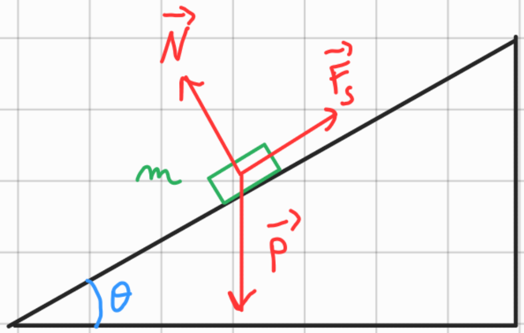
La balance affiche N/g.
$\Rightarrow$ à l'équilibre, la balance indique m, soit la masse de l'objet posé dessus.
Si on est sur la Lune, la balance n'indique plus m ! En effet,

$$N = m g_L \quad (\text{sur la Lune})$$

où g_L = l'accélération gravitationnelle sur la

Lune. ($g_L < g = 10\, m/s^2$).

2). Le plan incliné.



Question : pour quelles valeurs de θ ce système est-il à l'équilibre ?

Méthode : on suppose qu'il est à l'équilibre, et on explore les conséquences de $\vec{F} = m\vec{a}$.

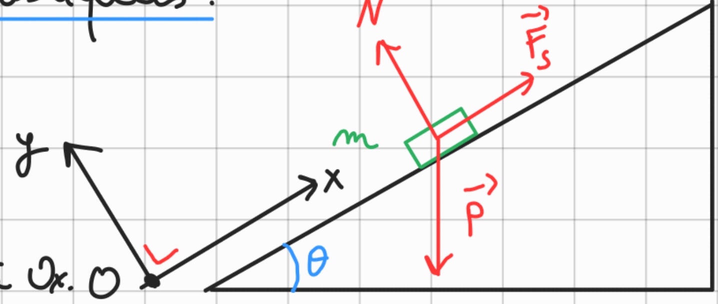
Nous allons faire ceci à l'aide de deux systèmes d'axes différents. La conclusion physique ne doit pas dépendre du système d'axes choisi !

$$\text{Equilibre} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_s} = \vec{0}$$

Prochaine étape : décomposer cette équation. Nos inconnues sont ici N et F_s. Les paramètres du problème sont : g, m, θ, μ_s.

Système d'axes obliques :

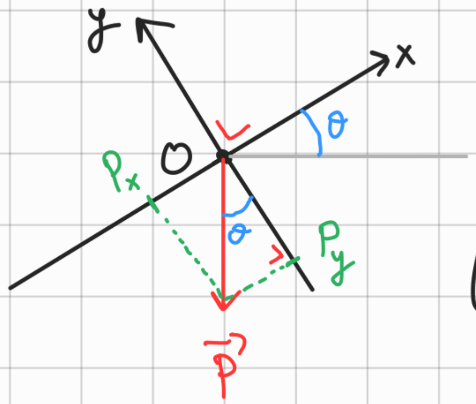
Ox est parallèle au plan incliné.
Oy est perpendiculaire à Ox.



Décomposons les vecteurs dans ce système d'axe :

$$\vec{N} = (0\,;\,N) \qquad \vec{F_S} = (F_S\,;\,0)$$

$\vec{P} = ?$ Un peu de travail à faire ...



$$P_x = -P\sin\theta$$
$$P_y = -P\cos\theta$$

(θ est plus petit que 90°.)

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = -P\,(\sin\theta\,;\,\cos\theta)$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_S} = (-P\sin\theta + 0 + F_S\,;\,-P\cos\theta + N + 0)$$
$= (0\,;\,0)$ par la condition d'équilibre.

$$\Rightarrow \begin{cases} -P\sin\theta + F_S = 0 \\ -P\cos\theta + N = 0 \end{cases}$$

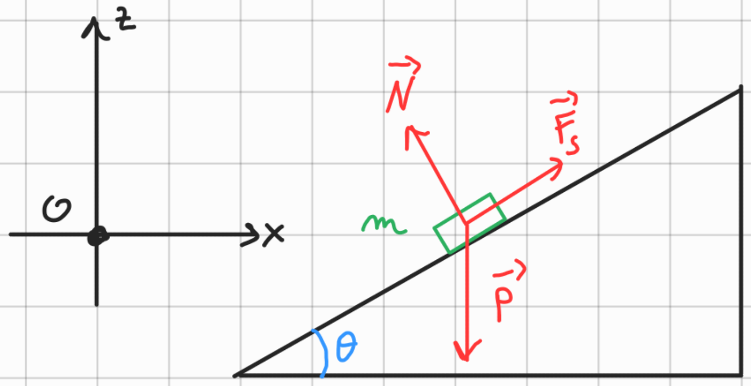
$$\Rightarrow \begin{cases} N = P\cos\theta = mg\cos\theta \\ F_S = P\sin\theta = mg\sin\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nous avons résolu le système d'équation et obtenu N et F_S en fonction des paramètres du problème.

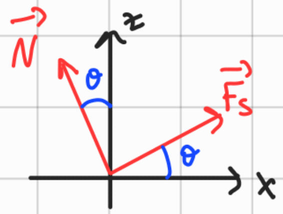
Nous devons encore analyser la condition d'existence des frottements statiques....

Mais avant, étudions ce système en un autre système d'axes.

Système d'axes droits :



$$\vec{P} = (P_x ; P_z) = (0 ; -mg)$$



$$\vec{N} = (-N\sin\theta ; N\cos\theta)$$
$$\vec{F_S} = (F_S\cos\theta ; F_S\sin\theta)$$

$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_S} = \vec{0}$ donne les équations :

$$\begin{cases} 0 - N\sin\theta + F_S\cos\theta = 0 & (Ox) \quad (1) \\ -mg + N\cos\theta + F_S\sin\theta = 0 & (Oz) \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow F_S = N\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$(2) \Rightarrow -mg + N\cos\theta + \overbrace{\left(N\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}^{F_S}\sin\theta = 0$$

$$N\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = mg$$

$$\frac{N}{\cos\theta}\underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1} = mg \Rightarrow N = mg\cos\theta.$$

Comme $F_s = N \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, on trouve alors

$$F_s = (mg \cancel{\cos\theta}) \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} = mg \sin\theta .$$

Conclusion : $\begin{cases} N = mg \cos\theta \\ F_s = mg \sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow$ ce sont les mêmes résultats que ceux trouvés en utilisant le système d'axes obliques ! (Heureusement ....).

Question : ces résultats sont-ils cohérents avec la condition d'existence des frottements statiques ?

Rappel : on doit toujours avoir $F_s \leq \mu_s N$.

Avec $N = mg \cos\theta$ et $F_s = mg \sin\theta$, ceci donne :

$$\underbrace{\cancel{mg} \sin\theta}_{F_s} \leq \mu_s \underbrace{\cancel{mg} \cos\theta}_{N}$$

$\Leftrightarrow \quad \tan\theta \leq \mu_s$.

Conclusion : le système à l'équilibre existe tant que $\theta \leq \arctan \mu_s$. Au delà, le corps se met en mouvement, car cela veut dire que F_s a atteint sa valeur maximale et ne peut donc plus empêcher la glissade ...
Remarquons que cet angle maximal ne dépend ni de g, ni de m.