Chapitre III : Théorèmes de Conservation

1. Energie, Puissance et Travail

Introduction : Energie = concept central en physique, chimie, biologie, ...

Energie : abstraction d'une quantité associée aux corps ou à n'importe quel système (galaxie, atome excité, athlète en saut, etc).
Dans ce chapitre, nous allons définir des énergies pour des corps physiques, et explorer comment ces énergies varient dans le temps.
Cela va nous mener à la notion de conservation d'énergie. De façon plus générale, on arrivera à l'équation de bilan d'énergie.

A. Energie Cinétique

Définition : pour un corps ponctuel de masse m et de vitesse de norme v, l'énergie cinétique E_c par

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Remarques :

1). $[E_c] = M L^2 T^{-2}$; SI : $kg\, m^2 s^{-2} = 1\, J$

(1J = 1 Joule).

2). E_c dépend, en général, du temps : $E_c(t)$.

Exemple : MRUA : $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$

$v = ?$

$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_0^2 + g^2 t^2 + \underbrace{2\vec{v}_0\cdot\vec{g}\,t}_{\text{dépendance en } t}$$

$$\Rightarrow E_c(t) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + g^2 t^2 + 2\vec{v}_0\cdot\vec{g}\,t \right)$$

C'est bien une fonction du temps.

3). $E_c > 0$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $E_c = 0$ si (et seulement si) $\vec{v} = \vec{0}$.

4). Ordres de grandeur ?

a. $m = 70$ kg $\quad v = 5$ km/h

$E_c = 68$ J

b. $m = 10$ tonnes $\quad v = 200$ km/h

$E_c = 2 \cdot 10^7$ J

B. Forces conservatives et Energie potentielle.

Remarquons que si E_c varie au cours du temps, alors v^2 varie aussi, donc $\vec{v}$ varie, ce qui est équivalent à dire que $\vec{F} \neq \vec{0}$ par $\vec{F} = m\vec{a}$:

si E_c dépend du temps $\Rightarrow \vec{F} \neq \vec{0}$

Parmi les forces qui s'exercent sur le corps, on distingue les forces conservatives qui, intuitivement, ne font que "emprunter" de l'énergie au corps.
On conçoit ces forces comme "déplaçant" de l'énergie cinétique vers une "réserve invisible" : c'est ce qu'on appelle l'Energie Potentielle.

En pratique, pour force conservative, il existe une fonction $E_p(t)$, telle que

$$E_c(t) + E_p(t)$$

ne dépend pas du temps.

Définition : $E_c + E_p$ est appelée l'énergie mécanique totale. On la note E:

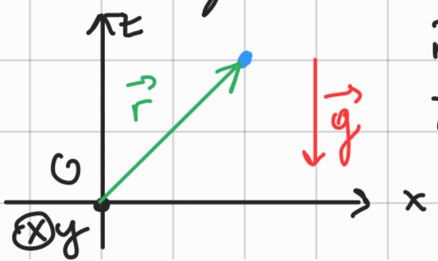
$$E = E_c + E_p.$$

Exemples :

1). $\vec{P} = m\vec{g}$ est une force conservative.
Formule pour E_p dans ce cas:

$$E_p = -m\,\vec{g}\cdot\vec{r}$$

où $\vec{r}$ = vecteur position ($\vec{r} = \vec{OP}$).
"Energie Potentielle Gravitationnelle".
Regardons ce que devient E_p avec un système d'axes Oxyz:



$\vec{r} = (x; y; z)$
$\vec{g} = (0; 0; -g)$

$$\Rightarrow \vec{g}\cdot\vec{r} = -gz \Rightarrow E_p = mgz$$

Si le corps monte ($\Rightarrow z$ croît) alors E_p augmente.

Vérifions que dans le cas du MRUA, $E_c + E_p$ ne dépend pas du temps.

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + g^2t^2 + 2\,\vec{v_0}\cdot\vec{g}\,t\right)$$

On décompose $\vec{v_0}$ dans notre système d'axes $Oxyz$: $\vec{v_0} = (v_{0x}; v_{0y}; v_{0z})$.
On a alors

$$\vec{v_0}\cdot\vec{g} = -g\,v_{0z}$$

$$\Rightarrow E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2g\,v_{0z}\,t\right).$$

Que vaut $E_p(t)$? On sait que $E_p = mgz$. Pour un MRUA, on sait que z est donné par :

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow E_p(t) = mg\left(z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

$$\Rightarrow E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + g^2t^2 - 2g\,v_{0z}\,t\right) + mg\left(z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}mg^2t^2} - \cancel{mg\,v_{0z}\,t} + mgz_0 + \cancel{mg\,v_{0z}\,t} - \cancel{\frac{1}{2}mg^2t^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g z_0$$

$\Rightarrow$ ne dépend plus du temps !

2). Force de rappel : $\vec{R} = k \overrightarrow{PP_0}$.

$$E_p = \frac{k}{2} \| \overrightarrow{PP_0} \|^2$$

Remarque : au moment où P passe en P_0, la vitesse est maximale. Donc E_c est maximale. De plus, $E_p = 0$ à cet instant.

Par contre, lorsque l'élongation est maximale, alors $E_c = 0$, mais E_p est maximal.

Peut-on comprendre ceci à l'aide des formules pour le MH ?

Rappel : (cin 1d) $x(t) = A \sin(\omega t)$

Dans le cas d'un ressort, on sait que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dimensions ? $\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{MLT^{-2}/L}{M} = T^{-2}$.

Calculons E_c : $\frac{1}{2} m v^2 = ?$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \left(\omega A \cos(\omega t)\right)^2$$

$$E_p = \frac{k}{2} x^2 = \frac{k}{2} \left(A \sin(\omega t) \right)^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cos(\omega t)^2 + \frac{k}{2} A^2 \sin(\omega t)^2$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \longrightarrow \quad = \frac{\cancel{m} k}{2 \cancel{m}} A^2 \cos(\omega t)^2 + \frac{kA^2}{2} \sin(\omega t)^2$$

$$= \frac{kA^2}{2} \underbrace{\left(\cos(\omega t)^2 + \sin(\omega t)^2 \right)}_{=1}$$

$$\Rightarrow E = \frac{kA^2}{2} .$$