Chapitre IV : Mécanique des Solides

1. Introduction

Ouverture difficile ?

1. Augmenter la force.
2. Ajouter un manche :

Même problème avec une porte :

point de rotation (point pivot)

↳ bcp plus facile !

Concept : "intensité de serrage".

→ pas que une question de force...

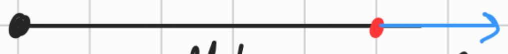
→ dépend aussi de la distance entre le centre de rotation et le point d'application de la force.

Autre ingrédient : l'angle entre la force et le vecteur allant du centre de rotation au point d'application.

porte

↗ et ↑ ont exactement le même effet sur

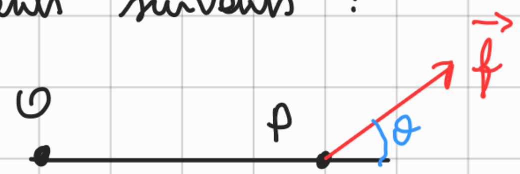
l'ouverture de la porte.
Cas extrême :



$\Rightarrow$ aucun effet sur l'ouverture de la porte.

Dernier ingrédient : le sens de rotation provoqué par la force.

Résumé : on cherche à définir un objet mathématique qui permet de formaliser la notion d'"intensité de serrage". Cet objet va dépendre des ingrédients suivants :



1). f
2). $d = \|\vec{OP}\|$
3). θ
4). Sens : trigonométrique.

2. La notion de moment de force

Le moment de force est le concept qui intègre les 4 éléments ci-dessus, et va nous permettre d'étudier quantitativement le problème de la mécanique des solides.

Interlude mathématique

Définition : pour deux $\vec{A}$ et $\vec{B}$, on définit le Produit Vectoriel par les formules suivantes :

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

Attention ! Le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ est lui-même un vecteur.

Propriétés :

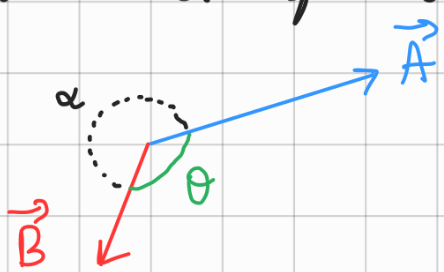
1). $\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$

$\Rightarrow$ importance de l'ordre !

2). $\vec{A} \times \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{A}$ et à $\vec{B}$.

3). $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \theta$

où θ est l'angle compris entre 0 et π et formé par $\vec{A}$ et $\vec{B}$.



α est $> \pi$

$\Rightarrow \sin \alpha < 0$.

$\theta < \pi \Rightarrow \sin \theta > 0$.

$\Rightarrow$ ok.

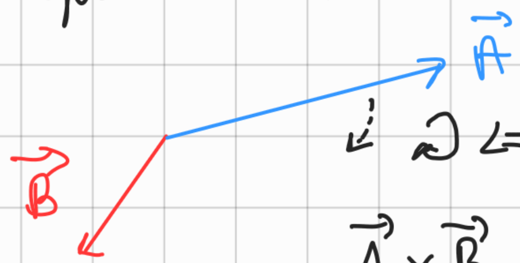
4). Le sens de $\vec{A} \times \vec{B}$ est donné par la règle de la main droite.

Idée : association du sens d'un vecteur avec un sens de rotation :

↺ trigonométrique $\Longleftrightarrow$ $\odot$

↻ horlogique $\Longleftrightarrow$ $\otimes$

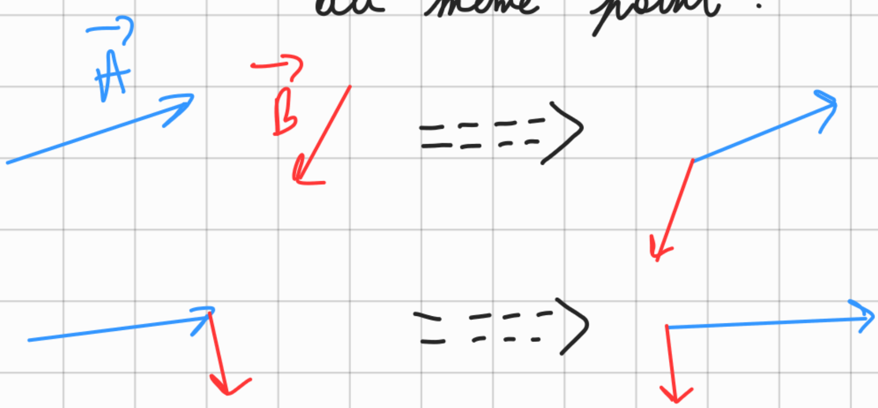
Pour associer un sens de rotation à $\vec{A} \times \vec{B}$, on imagine que l'on veut "pousser" $\vec{A}$ vers $\vec{B}$:



↻ $\Longleftrightarrow$ $\otimes$

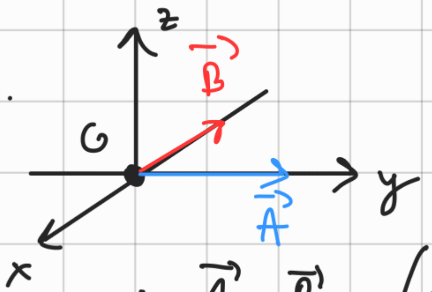
$\vec{A} \times \vec{B}$ est donc le sens $\otimes$.

Attention : si les vecteurs sont représentés en des points différents, il faut d'abord les localiser au même point :



Exemples :

1).



$\Rightarrow$ $\vec{A} \times \vec{B}$ va dans le sens des z croissants.

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \left(0 ; 0 ; \|\vec{A} \times \vec{B}\|\right)$$

$$= \left(0 ; 0 ; AB \sin\theta\right)$$

$$= \left(0 ; 0 ; AB\right) \quad \text{car } \theta = 90°.$$

Par la définition ?

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \overset{A_x}{0} ; & \overset{A_y}{A} ; & \overset{A_z}{0} \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} \overset{B_x}{-B} ; & \overset{B_y}{0} ; & \overset{B_z}{0} \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$= A \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_y = A_z B_x - A_x B_z$$

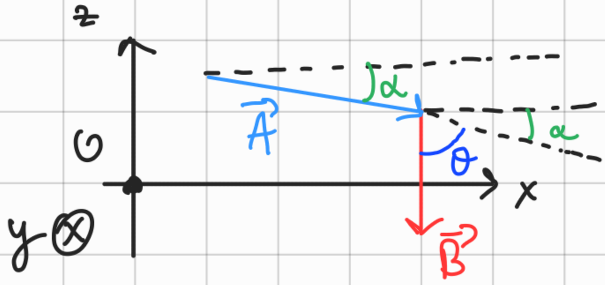
$$= 0 \cdot (-B) - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$= 0 \cdot 0 - A(-B) = AB$$

$$\rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \left(0 ; 0 ; AB\right)$$

2).



α : angle donné dans le problème.

$\vec{A} \times \vec{B}$: sens : y positifs : $(0 ; \|\vec{A}\times\vec{B}\| ; 0)$

Norme ?

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = AB \sin\theta$$

Quelle est la relation entre θ et α ?

On a $\alpha + \theta = \pi/2$.

$\Rightarrow \sin\theta = \cos\alpha$.

$\Rightarrow \|\vec{A}\times\vec{B}\| = AB\cos\alpha$.

Fin de l'interlude mathématique.

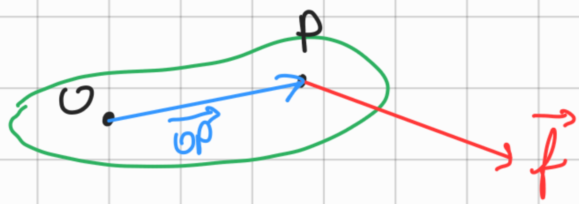
<u>Définition</u> : le **moment de la force $\vec{f}$**, appliquée en P, et par rapport au point O est

$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}.$$

$\vec{OP}$ est appelé le **bras de levier.**

$\vec{\tau}_O(\vec{f})$ inclut toutes les propriétés que l'on a exploré au début du chapitre :

$$\|\vec{\tau}_O(\vec{f})\| = \|\vec{OP}\| f \sin\theta$$



$\vec{\tau}_O(\vec{f})$: sens $\otimes$.