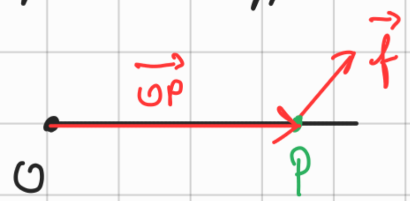
(Suite chap. IV. Mécanique des solides)

Rappel :

Concept central : le moment de force.

$$\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}$$

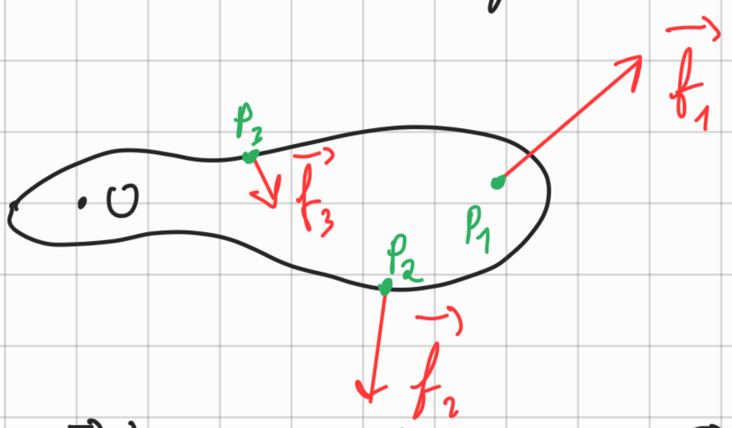
où P = point d'application de $\vec{f}$:



Idée : mouvement de rotation dépend du moment de force total.

3. Equilibre d'un corps solide.

Si plusieurs forces s'exercent sur un corps solide, alors on définit le moment de force total $\vec{\tau}_O$ en faisant la somme de tous les moments de force :



$$\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O(\vec{f}_1) + \vec{\tau}_O(\vec{f}_2) + \vec{\tau}_O(\vec{f}_3) + \dots$$

$$= \vec{OP_1} \times \vec{f}_1 + \vec{OP_2} \times \vec{f}_2 + \vec{OP_3} \times \vec{f}_3 + \dots$$

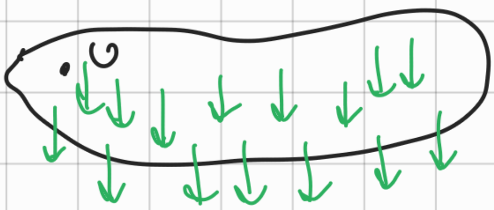
Le système est à l'équilibre si

1). $\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \dots = \vec{0}$.
(condition d'équilibre "habituelle")

2). $\vec{\tau}_O = \vec{0}$ "équilibre pour les rotations".

4. Centre de gravité

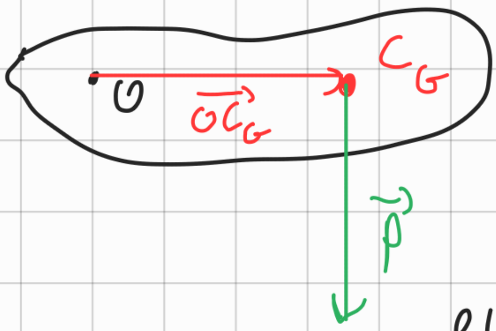
Corps solide avec une distribution de masse quelconque, calculer les moments de force pour chaque vecteur de poids semble impossible :



$\downarrow$ = poids de chaque élément du corps.

Définition : le centre de gravité C_G est un point tel que

$$\vec{\tau}_O(\vec{P}) = \vec{OC_G} \times \vec{P}.$$



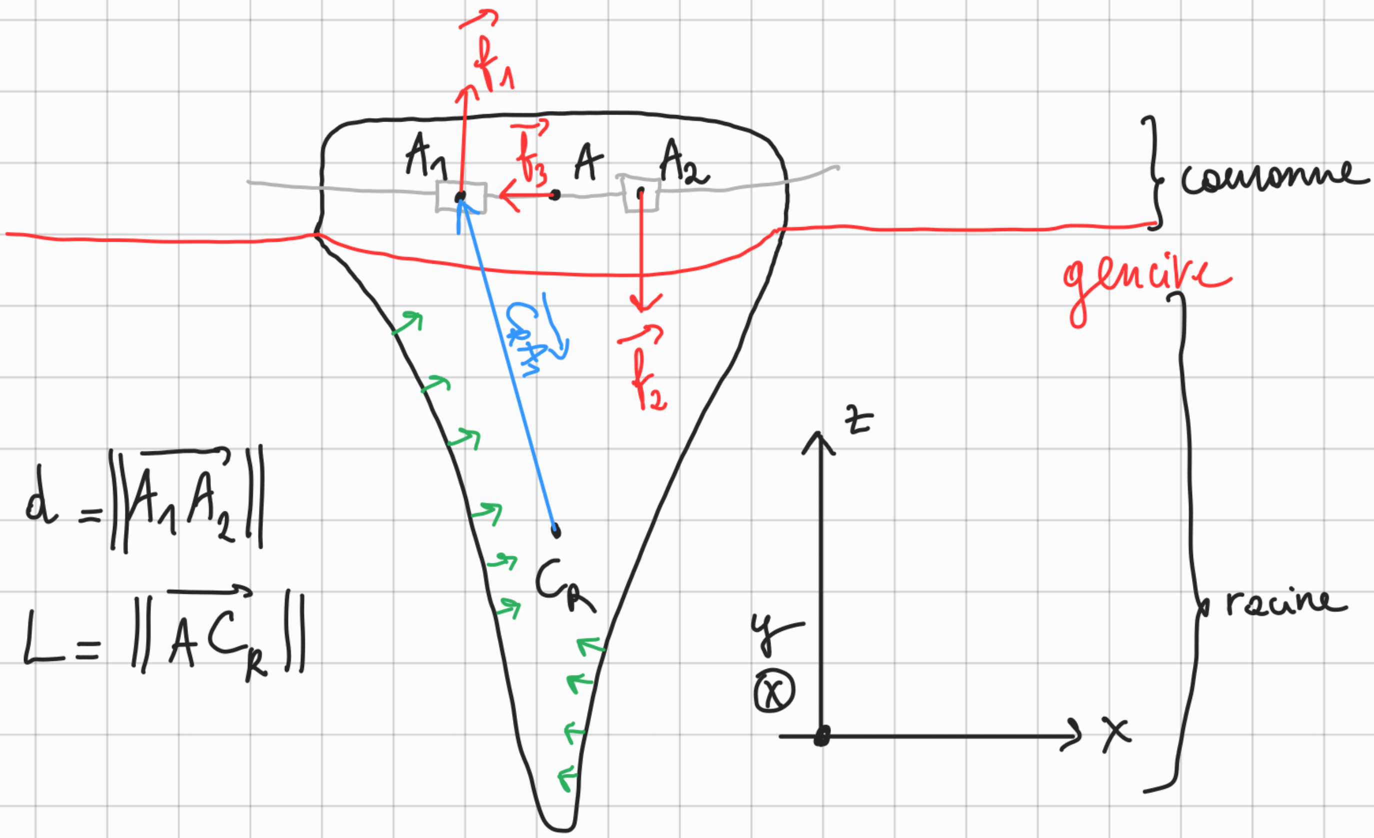
Ceci simplifie énormément les calculs !

Mais cela suppose que l'on connaisse C_G.

Propriété : lorsque le champ gravitation est homogène (c'est-à-dire que $\vec{g}$ est constant), alors le centre de gravité et le centre de masse coïncident :

$$C_G = C_M.$$

5. Application biomédicale : translation d'une dent.



$d = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$

$L = \|\overrightarrow{AC_R}\|$

But : régler les forces exercées sur la couronne afin que le moment de force total soit nul ("pas de rotation").
La force totale doit être non-nulle et dirigée vers la gauche.

La force totale est $\vec{f}$: vers la gauche et de norme $f = 10N$.

La gencive exerce une force en chaque point de contact entre la gencive et la racine.
Si on note $\vec{G}$ la force totale exercée par la gencive sur la racine, alors

$$\vec{\tau}_O(\vec{G}) = \overrightarrow{OC_R} \times \vec{G}$$

où C_R = "Centre de Résistance".

Nous devons régler les forces $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ et $\vec{f_3}$ pour avoir un moment de force total nul.

On suppose que $\vec{f_1} = -\vec{f_2}$.

Déterminons $\vec{f_3}$: on veut

$$\cancel{\vec{f_1}} + \cancel{\vec{f_2}} + \vec{f_3} = \vec{f}.$$

$$\Rightarrow \vec{f_3} = (-10N; 0; 0)$$

Que vaut la force exercée par $\vec{G}$?
La force totale doit valoir $\vec{0}$:

$$\cancel{\vec{f_1}} + \cancel{\vec{f_2}} + \vec{f_3} + \vec{G} = \vec{0} \Rightarrow \vec{G} = -\vec{f}.$$

$$\vec{G} = (10N; 0; 0)$$

Pour le moment de force, nous devons par rapport à quel point le calculer.

On choisit C_R :

condition d'équilibre de rotation.

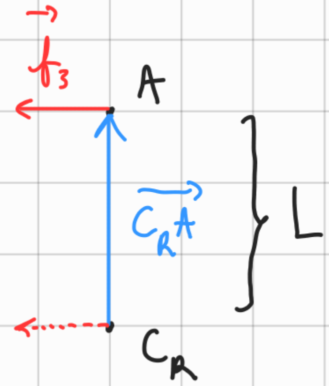
$$\vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_1}) + \vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_2}) + \vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_3}) + \vec{\tau}_{C_R}(\vec{G}) = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_{C_R}(\vec{G}) = \underbrace{\overrightarrow{C_R C_R}}_{\vec{0}} \times \vec{G} = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_3}) = (0; -f_3 L; 0)$$

$\odot$

$\overrightarrow{C_R A} \times \vec{f_3}$



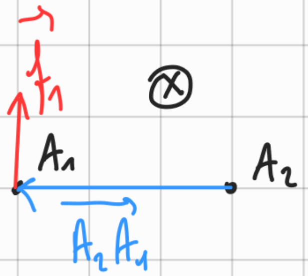
$$\|\overrightarrow{C_R A} \times \vec{f_3}\| = \underbrace{\|\overrightarrow{C_R A}\|}_{L} f_3 \underbrace{\sin 90°}_{1}$$

$$\vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_1}) + \vec{\tau}_{C_R}(\vec{f_2}) = \overrightarrow{C_R A_1} \times \vec{f_1} + \overrightarrow{C_R A_2} \times \vec{f_2}$$

$$= \overrightarrow{C_R A_1} \times \vec{f_1} - \overrightarrow{C_R A_2} \times \vec{f_1}$$

$\vec{f_2} = -\vec{f_1}$

$$= \overrightarrow{C_R A_1} \times \vec{f_1} + \overrightarrow{A_2 C_R} \times \vec{f_1}$$



$$= \underbrace{(\overrightarrow{C_R A_1} + \overrightarrow{A_2 C_R})}_{\overrightarrow{A_2 A_1}} \times \vec{f_1}$$

$$= (0; d f_1; 0)$$

Condition d'équilibre : $(0; -L f_3; 0) + (0; d f_1; 0) = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \quad -L f_3 + d f_1 = 0.$$

$$\boxed{f_1 = \frac{L}{d} f_3}.$$

En résumé : les forces à régler sont :

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \left(0; 0; \frac{L}{d} f\right) \\ \vec{f}_2 = \left(0; 0; -\frac{L}{d} f\right) \\ \vec{f}_3 = \left(-f; 0; 0\right) \end{cases}$$