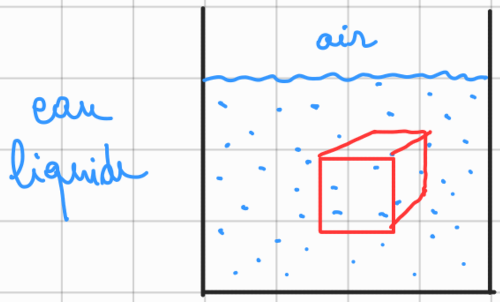
Chapitre V : Mécanique des Fluides

1. Introduction

Corps solides : distances entre les points sont fixées.
Fluides : on abandonne cette hypothèse...
Problème extrêmement complexe !
(Prix de la fondation Clay : 10^6 \$).

Fluides : gaz, liquide.
Eau, air, sang, LCR, etc ...



V "petit" : contient une certaine quantité de matière ; masse $m(V)$.

Définition : la masse volumique du fluide est définie par
$$\rho = \frac{m(V)}{V}.$$

$[\rho] = ML^{-3}$ SI : $kg\, m^{-3}$

Exemples de valeur :

1. Eau (liquide) : $\rho_0 = 997\ kg\, m^{-3}$

$$\rho_0 \simeq 1000\ kg\, m^{-3}$$

2. Sang : $\rho_{sang} = 1.06 \ g/mL = 1060 \ kg \, m^{-3}$

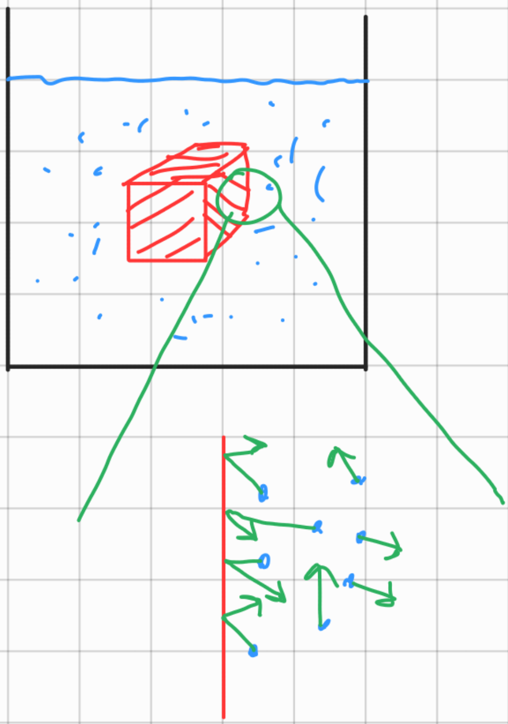
$$\rho_{sang} \simeq \rho_0 .$$

3. LCR : 99% eau $\Rightarrow \rho_{LCR} \simeq \rho_0$.

4. Air (T=0°C ; sec ; 1 atm) : $\rho_{air} = 1.292 \ kg \, m^{-3}$.

$$\rho_{air} \simeq \frac{\rho_0}{1000}$$

Faisons une expérience de pensée :
On vide le volume V.



$\Rightarrow$ les constituants du fluide exercent une force sur les côtés du cube.
Ceci dû collisions entre les constituants et la paroi du cube.
Comme un nombre énorme (10^{23}) de molécules sont présentes, on a, en moyenne, une force constante. C'est la force de pression.

Définition : la pression est définie par

$$p = \frac{F}{S}$$

où F = force exercée par le fluide sur la surface
S = l'aire de la surface.

$$[p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \qquad \text{SI: } kg\,m^{-1}s^{-2}$$

* Le Pascal : $1\,Pa = 1\,kg\,m^{-1}s^{-2}$.
* Atmosphère : $1\,atm = 101325\,Pa$.

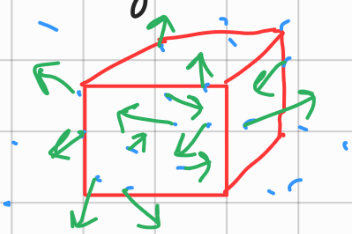
Définition : un fluide est incompressible si ρ ne dépend pas de la pression.

Eau (typiquement : les liquides) : incompressible.
Air (——— : les gaz) : compressible.

2. Hydrostatique.

⟹ étude des liquides au repos.
Comment cela est-il possible étant donné l'agitation permanente des molécules ?

Idée : dans un "petit" volume V, la vitesse moyenne des molécules vaut 0 :

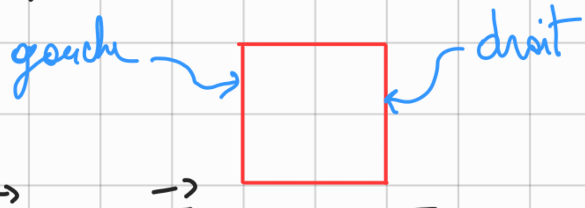


Moyenne des flèches vertes dans V : $\vec{0}$.

V est suffisament grand, par à l'échelle moléculaire, pour que ceci ait un sens.
V est appelé un volume à l'échelle mésoscopique :

échelle moléculaire (microscopique) << échelle mésoscopique << échelle macroscopique

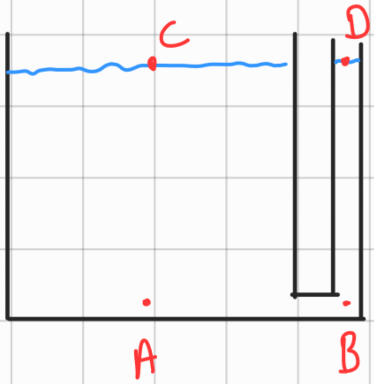
Conséquence pour un fluide au repos : la force totale sur V vaut zéro.



$$\vec{F}_g = -\vec{F}_d \Rightarrow F_g = F_d \Rightarrow p_g = p_d$$

Conclusion : dans un fluide au repos, la pression ne dépend que la hauteur.

Ceci est déjà assez contre-intuitif ...

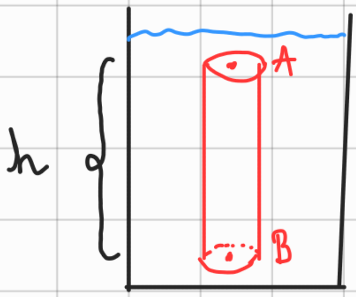


A et B sont à la même hauteur $\Rightarrow p_A = p_B$.

Ceci implique également que la hauteur du fluide est constante.
Pression de l'air : 1 atm $\Rightarrow$ la même

que l'on soit en C ou D.
$\Rightarrow p_C = p_D \Rightarrow$ à la même hauteur.

Question : comment la pression dépend-elle de la hauteur ?



Bilan des forces sur ce cylindre.

$$p_A S + mg - p_B S = 0$$

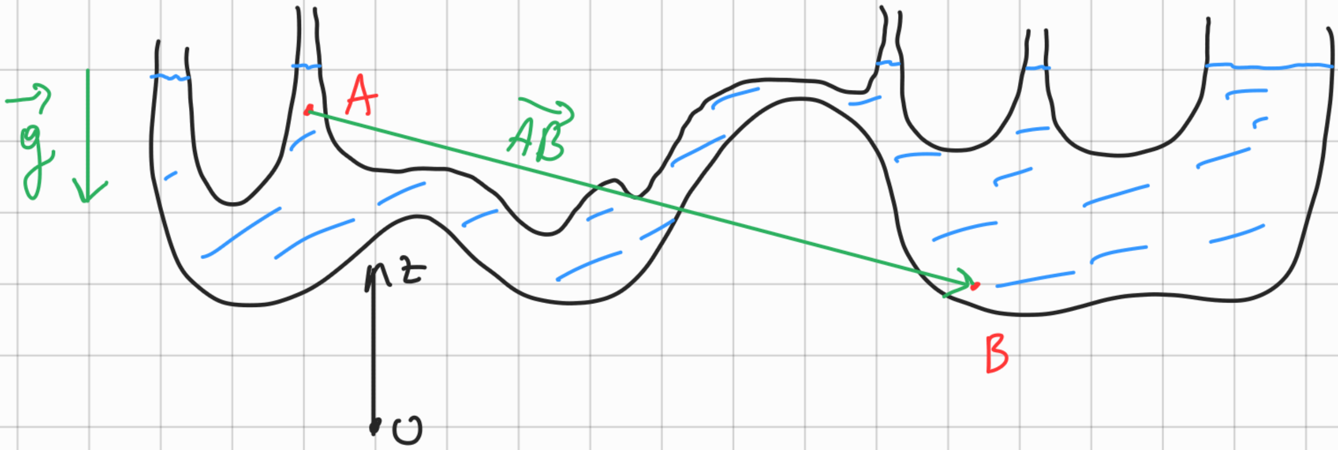
S : surface de la base du cylindre, et m : masse incluse dans le cylindre :
$m = \rho_0 V = \rho_0 S h$

$$\Rightarrow p_A S + \rho_0 S h g - p_B S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_B - p_A = \rho_0 g h}$$ (pour un fluide incompressible).

Loi de Pascal : pour un fluide incompressible au repos, la différence de pression Δp entre deux points A et B du fluide vaut :

$$\Delta p = p_B - p_A = \rho \vec{g} \cdot \overrightarrow{AB}$$



$$\vec g \cdot \vec{AB} = (0\,;0\,;-g)\cdot(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A\,;\, z_B - z_A)$$

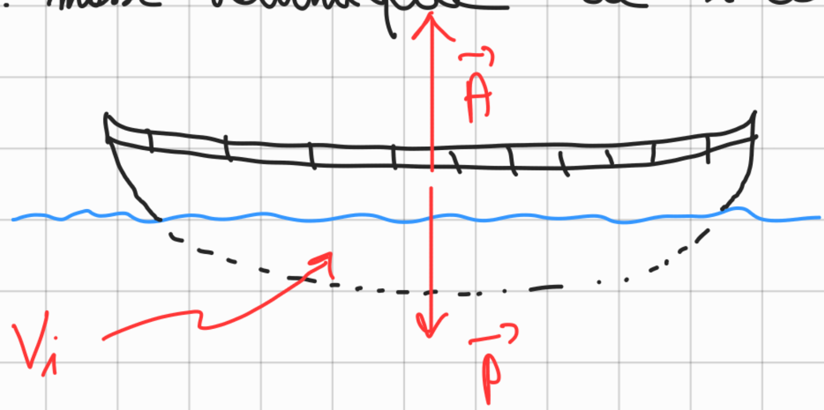
$$= g(z_A - z_B) \Rightarrow \boxed{p_B - p_A = \rho g (z_A - z_B)}$$

Application : la force d'Archimède.

Pour un corps de volume V, dont le volume immergé vaut V_i, alors les fluides exercent sur le corps une force donnée par

$$\vec A = -\rho_0 V_i \vec g$$

ρ_0 : masse volumique de l'eau.



Condition de flottaison : comme $V_i \leq V$,

$$A \leq \rho_0 V g$$

Flottaison $\iff$ $P = A \leq \rho_0 V g$

$P = mg \implies mg \leq \rho_0 V g$

masse du bateau

$$\iff \frac{m}{V} \leq \rho_0 .$$

volume du bateau