Question examen (PHYS G1102, 202223, janvier)

1). $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = ?$

Immobile $\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

Or : $\vec{F} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{P}$ où $\vec{P} = m\vec{g}$

Donc :

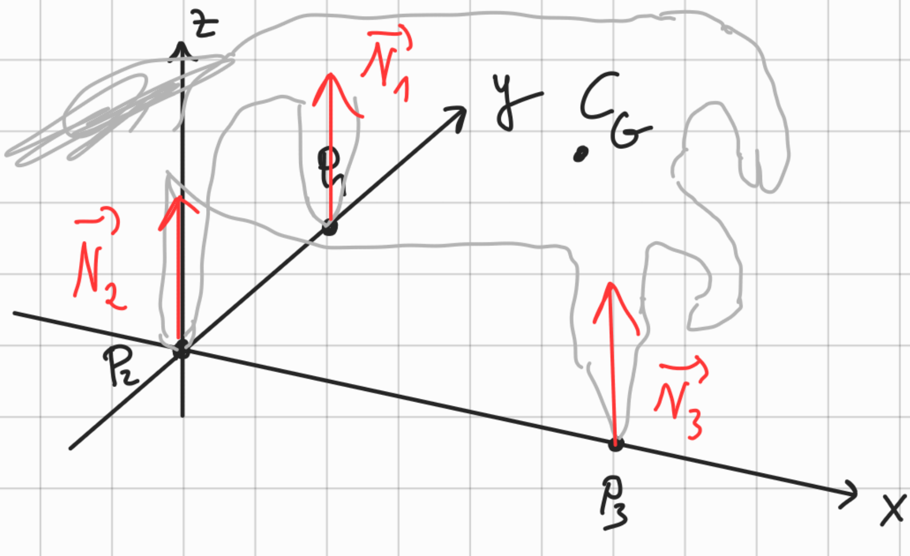
$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = -m\vec{g}}.$$

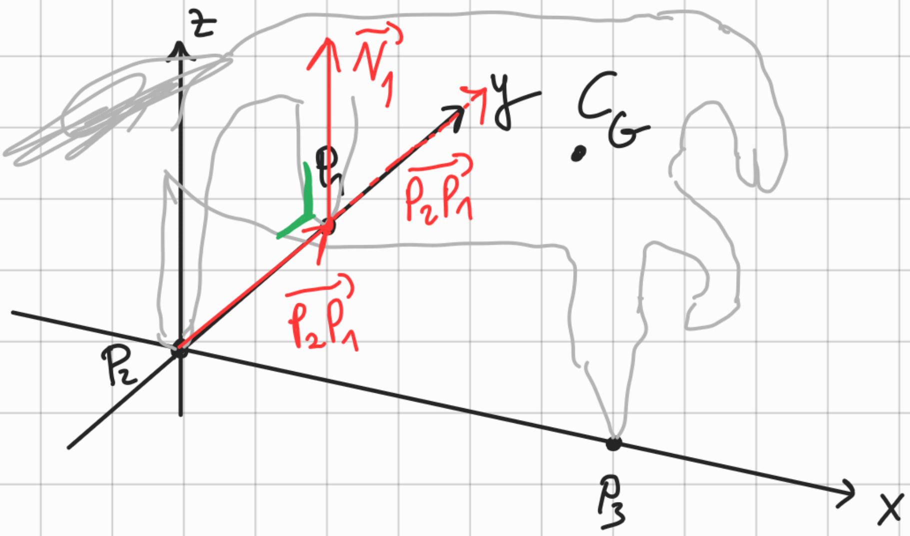
$\vec{N}_1 = (0;0;N_1)$
$\vec{N}_2 = (0;0;N_2)$
$\vec{N}_3 = (0;0;N_3)$

On peut aussi écrire $\vec{g} = (0;0;-g)$, donc

$$\boxed{\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = (0;0;mg)}.$$



2. $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_1)$; $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_2)$; $\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_3)$



$$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = \vec{P_2P_1} \times \vec{N_1} \qquad \left(\vec{\tau}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \times \vec{f}\right)$$

Deux possibilités :

1). Par la définition :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y \,;\, A_zB_x - A_xB_z \,;\, A_xB_y - A_yB_x\right)$$

$$\vec{P_2P_1} \times \vec{N_1} = \;?$$

$$\vec{P_2P_1} = (0 \,;\, d \,;\, 0)$$

$$\vec{N_1} = (0 \,;\, 0 \,;\, N_1)$$

$$\Rightarrow \vec{P_2P_1} \times \vec{N_1} = (\underbrace{d}_{A_y}\underbrace{N_1}_{B_z} - \underbrace{0}_{A_z}.\underbrace{0}_{B_y} \,;\, \underbrace{0}_{A_z}.\underbrace{0}_{B_x} - \underbrace{0}_{A_x}.\underbrace{N_1}_{B_z} \,;\, \underbrace{0}_{A_x}.\underbrace{0}_{B_y} - \underbrace{d}_{A_y}.\underbrace{0}_{B_x})$$

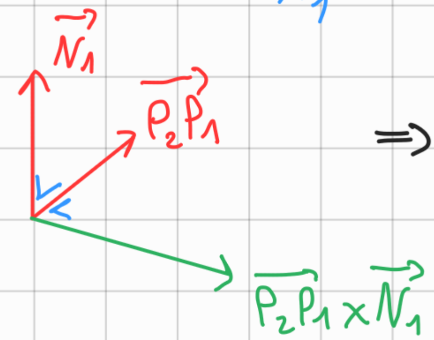
$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N_1}) = (dN_1 \,;\, 0 \,;\, 0)}$$

2). Par la règle de la main droite et la formule pour la norme.

ok.

$$\left\|\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_1)\right\| = \underbrace{\|\overrightarrow{P_2P_1}\|}_{d}\underbrace{\|\vec{N}_1\|}_{N_1}\underbrace{\sin\theta}_{1}$$

Direction ?



$\Rightarrow \overrightarrow{P_2P_1}\times\vec{N}_1$ est dans la dir. des x positifs.

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_1) = (dN_1\,;\,0\,;\,0)$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_2) = \vec{0}}$$ car $\overrightarrow{P_2P_2} = \vec{0}$.

$$\boxed{\vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_3) = (0\,;-LN_3\,;\,0)}$$

$\vec{N}_3 = (0\,;0\,;N_3)$
$\overrightarrow{P_2P_3} = (L\,;0\,;0)$

3. $$\vec{\tau}_{P_2}(\vec{P}) = \overrightarrow{P_2C_G}\times\vec{P}$$

$$\overrightarrow{P_2C_G} = \left(\frac{3L}{4}\,;\,\frac{d}{5}\,;\,h\right)$$

$$\vec{P} = (0\,;0\,;-mg)$$

$$\overrightarrow{P_2C_G}\times\vec{P} = \left(\underset{A_y}{\frac{d}{5}}\cdot\underset{B_z}{\underbrace{(-mg)}} - \underset{A_z}{h}\cdot\underset{B_y}{0}\,;\,\overset{A_z}{h}\cdot\overset{B_x}{0} - \overset{A_x}{\frac{3L}{4}}\cdot\overset{B_z}{\overbrace{(-mg)}}\,;\,\overset{A_x}{\frac{3L}{4}}\cdot\overset{B_y}{0} - \overset{A_y}{\frac{d}{5}}\cdot\overset{B_x}{0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{P_2C_G}\times\vec{P} = \left(-\frac{d}{5}mg\,;\,\frac{3L}{4}mg\,;\,0\right)}$$

4. Immobile $\Rightarrow \vec{\tau}_P = \vec{0}$, où

$$\vec{\tau}_{P_2} = \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_1) + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_2) + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{N}_3) + \vec{\tau}_{P_2}(\vec{P})$$

$$= (dN_1 ; 0 ; 0) + \vec{0} + (0 ; -LN_3 ; 0) + \left(-\frac{d}{5}mg ; \frac{3L}{4}mg ; 0\right)$$

$$= \left(dN_1 - \frac{d}{5}mg ; -LN_3 + \frac{3L}{4}mg ; 0\right)$$

$$= (0 ; 0 ; 0) \quad \text{(car immobile.)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dN_1 - \frac{d}{5}mg = 0 \\ -LN_3 + \frac{3L}{4}mg = 0 \end{cases}$$

Troisième équation ? Sous-question 1). :

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3}_{(0 ; 0 ; N_1 + N_2 + N_3)} = (0 ; 0 ; mg) \end{array}\right\} \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = mg.$$

$\Rightarrow$ 3 équations pour 3 inconnues :

$$\begin{cases} dN_1 - \frac{d}{5}mg = 0 \\ -LN_3 + \frac{3L}{4}mg = 0 \\ N_1 + N_2 + N_3 = mg \end{cases}$$

Solution :

$$N_1 = \frac{m}{5}g$$

$$N_3 = \frac{3m}{4}g$$

$$N_2 = mg - N_1 - N_3 = mg - \frac{m}{5}g - \frac{3m}{4}g$$

$$= mg\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) = mg\,\frac{20 - 4 - 15}{20}$$

$$= \frac{m}{20} g$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{m}{5} g \quad ; N_2 = \frac{m}{20} g \quad ; N_3 = \frac{3m}{4} g .}$$